TP φ04 - Loi de décroissance radioactive

I. Principe

Dans le cadre de cette séance, il s'agit de d'étudier la manière dont évolue une population de N noyaux radioactifs, au cours du temps. Et ceci à partir d'un modèle numérique de type « lancer de dés ».

Supposons que l'on dispose de N(0) noyaux radioactifs à t = 0. Nous allons tacher de prévoir combien il en restera une seconde plus tard, vingt secondes plus tard, etc. Autrement dit, nous allons tenter d'obtenir l'allure de la courbe représentative de la fonction t → N(t).

Dans cette séance, **nous supposerons que chaque noyau possède, pendant une durée Δt = 1 s, une probabilité 1/6 de se désintégrer**.

Voici le principe de la simulation que nous allons utiliser :

Chacun des N(t) noyaux sera représenté par un dé à six faces. A un instant t, afin de prévoir l'évolution de la population des noyaux, nous lancerons les N(t) dés. Lorsqu'un dé se placera en position « six », alors nous considérerons que le noyau s'est désintégré. Nous isolerons et nous compterons les noyaux désintégrés, puis en déduirons la valeur de $N(t+\Delta t)$ (nombre de noyaux radioactifs restant). Nous recommencerons la manipulation, en lançant les $N(t+\Delta t)$ restant ; ainsi de suite…

Avant même de réaliser l'expérience, répondre aux questions suivantes :

a) La fonction t → N(t) sera-t-elle croissante ? Justifier.

b) Que vaudra $\lim\limits_{t\to+\infty} N(t)$? Justifier.

c) Comment vaut-il mieux choisir le nombre de dés initial afin d'obtenir une simulation qui se rapproche de la réalité ?

A l'aide d'un tableur, nous tracerons la courbe t → N(t) que l'on comparera avec le résultat obtenu en cours par la résolution d'une équation différentielle.

II. Observation de la décroissance radioactive

1) Réalisation de la simulation

- Lancer le logiciel « lancer de dés ». Cliquer sur « Décroissance du nombre de dés », puis, dans le menu « Nombre de dés », cliquer sur « Passer à un million de dés ».

- Lancer le tableur ***OpenOffice Calc*** et enregistrer un fichier vierge sur l'ordinateur (faire figurer les noms des membres du binôme dans le nom du fichier). À la fin de la séance, ne pas oublier de récupérer ce fichier (via une clé USB ou un envoi par messagerie électronique).

  Dans la colonne A du tableur, indiquer le numéro du tirage, en commençant par la valeur 0. Le numéro du tirage correspondra aussi au temps t écoulé (en secondes), puisque nous progressons par des incréments temporels de $\Delta t = 1\,s$.

  Dans la colonne B, indiquer le nombre de dés restant, correspondant à ce tirage.

	A	B
1	**Numéro du tirage, égal aussi à t (s)**	**Nombre de dés restant après le tirage**
2	0	1000000
3	1	
4	2	
5	3	
6	4	
7	5	
8	6	
9	7	

- Pour effectuer le premier lancer de dés, cliquer sur « lancer » dans le logiciel « lancer de dés ».

  Noter dans le tableur, en B3 le nombre de dés restant.

  Effectuer un 2nd lancer en cliquant sur « lancer » dans le logiciel « lancer de dés » puis noter le nombre de dés restant dans le tableur en B4, ainsi de suite…

2) Exploitation des résultats

Courbe représentative de l'évolution du nombre de noyaux

a) Tracer la courbe N = f(t) dans le tableur. Le type de graphe à sélectionner est « XY (dispersion) », l'équivalent du « nuage de points » d'Excel).

b) Quelle est l'allure de la courbe ? (à quelle fonction vous fait-elle penser ?)

Equation de la courbe

Nous allons maintenant tracer, sur un nouveau graphe, ln(N) = f(t), où ln est la fonction logarithme népérien.

Ajouter une troisième colonne dans le tableur, et y faire figurer, en utilisant la fonction LN, la valeur ln(N).

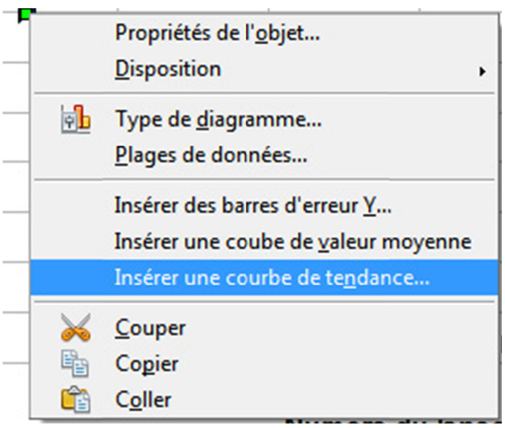
Numéro du tirage, égal aussi à t (s)	Nombre de dés restant après le tirage	ln (nombre de dés)
0	1000000	=LN(B2)
1	833167	
2	694772	
3	578134	

Créer la courbe ln(N) = f(t) en suivant les mêmes étapes que pour la création de la courbe N = f(t).

Le nuage de points obtenu devrait s'approcher d'une droite. Nous allons déterminer l'équation de cette droite, c'est-à-dire la relation affine $\ln(N) = a\,t + b$, puis nous en déduirons la relation numérique entre N et t.

Le tableur peut calculer une *courbe de tendance*, c'est-à-dire une courbe s'approchant le plus près possible des points du graphe. L'équation approchée de la fonction affine peut donc être calculée automatiquement par le tableur.

Double cliquer sur le cadre de la courbe représentant la fonction $t \to \ln(N)$, pour l'éditer. Cliquer droit sur la courbe puis cliquer sur « insérer une courbe de tendance ».



Choisir le type « linéaire » (qui signifie « affine », en réalité), cocher « Afficher l'équation », valider.

a) À partir de l'équation $\ln(N) = a \times t + b$, en déduire une expression numérique de $N(t)$ (on rappelle que la fonction réciproque de la fonction ln est la fonction exponentielle exp).

b) Identifier les deux grandeurs numériques apparaissant dans la fonction $t \to N(t)$.

Temps caractéristique

a) Déterminer graphiquement le temps nécessaire pour passer :

- de 1 000 000 à 500 000 noyaux ;
- de 400 000 à 200 000 noyaux ;
- de 100 000 à 50 000 noyaux.

Que remarque-t-on ? Comment appellera-t-on cette durée ?

III. Résolution analytique de l'équation différentielle régissant l'évolution de N

Cette dernière partie a pour objet de refaire une démonstration du cours, afin de mieux l'assimiler.

Mise en place de l'équation différentielle

Rappel des notations :

- À l'instant t, le nombre de noyaux est N(t).
- À l'instant $t + \Delta t$, le nombre de noyaux est $N(t + \Delta t)$.
- La variation du nombre de noyaux pendant cette durée est notée ΔN et vaut $\Delta N = N(t + \Delta t) - N(t)$.

a) Quel est le signe de ΔN ?

b) Que vaut le nombre de désintégrations pendant Δt ?

c) Que dire du nombre de désintégrations pendant une durée Δt :

- relativement au nombre de noyaux à l'instant t ?
- relativement à la durée Δt considérée ?

d) En déduire l'équation différentielle qui régit l'évolution du nombre de noyaux au cours du temps.

Résolution analytique

a) Montrer que la fonction $t \to a \times e^{b \times t}$ est solution de cette équation différentielle.

b) A quoi la constante *a* est-elle égale ?

c) De quoi la constante *b* dépend-elle ?

d) Ces résultats correspondent-ils à ceux de l'étude expérimentale réalisée en II ?

TP φ04 - Loi de décroissance radioactive
– éléments de correction –

I. Principe

a) La fonction $t \rightarrow N(t)$ est décroissante, car le nombre de noyaux diminue au cours du temps. En effet, à chaque lancer, chacun a une probabilité de 1/6 de se désintégrer.

b) Tous les noyaux finiront par se désintégrer. $\lim_{t \to +\infty} N(t) = 0$.

c) Pour voir se dessiner une tendance globale sur une population d'objets dont l'évolution est régie par des lois aléatoires, il est nécessaire d'étudier un grand nombre de ces objets.

II. Observation de la décroissance radioactive

Réalisation de la simulation

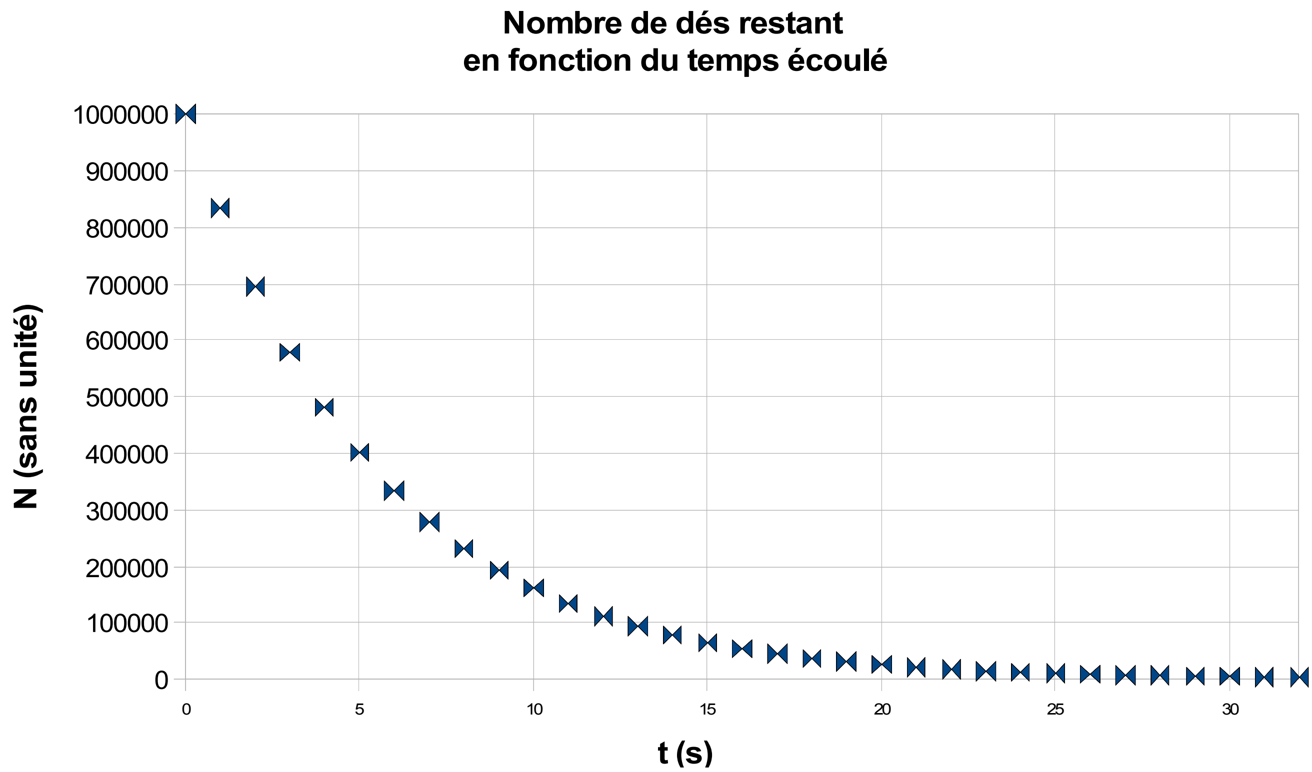
Voici les données que nous obtenons :

Numéro du tirage, égal aussi à t (s)	Nombre de dés restant après le tirage
0	1000000
1	833167
2	694772
3	578134
4	482186
5	401506
6	334450
7	278860
8	232361
9	193847
10	161588
11	134462
12	112126
13	93477
14	77964
15	65089
16	54243
17	45186
18	37542
19	31256
20	26078
21	21753
22	18025
23	14989
24	12491
25	10494
26	8742
27	7265
28	7265
29	6071
30	5042
31	4195
32	3471

2) Exploitation des résultats

Courbe représentative de l'évolution du nombre de noyaux

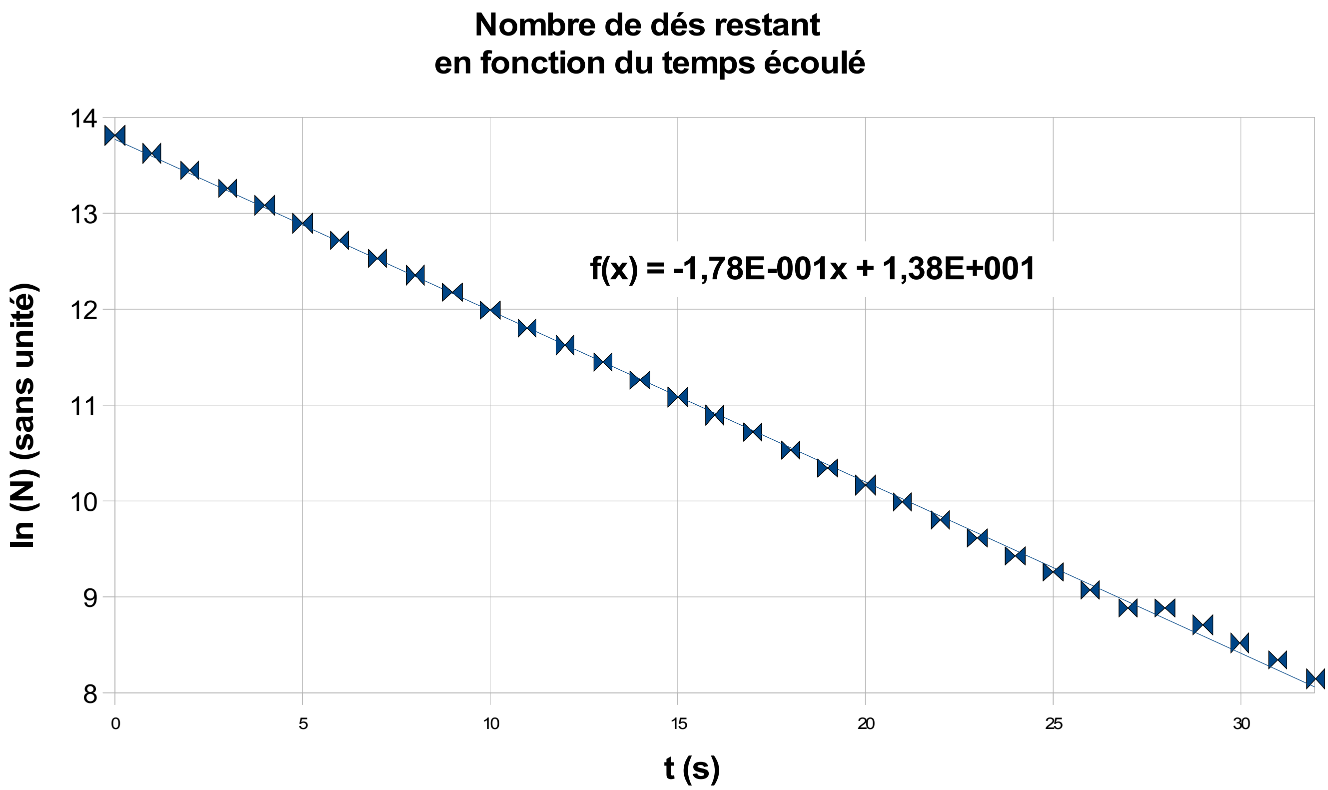
a) Voici la courbe obtenue :



b) Cette courbe nous rappelle la courbe représentative de la fonction exponentielle (pour être précis : son image par une réflexion d'axe vertical).

Equation de la courbe

Voici la courbe que nous obtenons, avec sa courbe de tendance :



a) L'équation de la courbe de tendance est $\ln(N) = 13{,}8 - 0{,}178 \times t$ (attention aux chiffres significatifs).

Il vient donc : $N = e^{13{,}8-0{,}178\times t}$, c'est-à-dire $N = e^{13{,}8} \times e^{-0{,}178\times t}$, c'est-à-dire, après calcul : $N = 9{,}85.10^5 \times e^{-0{,}178\times t}$.

b) $9{,}85.10^5$ est proche de 1 000 000, c'est-à-dire de N(0).

Ceci est cohérent avec la solution de l'équation différentielle vue en cours, laquelle aboutit à : $N = N(0) \times e^{-\lambda\times t}$, avec $\lambda = 0{,}178\ s^{-1}$, la constante radioactive des noyaux étudiés.

On rappelle que la constant radioactive λ été introduite, en classe, via la relation $\Delta N = -\lambda \times N \times \Delta t$. λ représente donc la proportions de noyaux désintégrés par unité de temps. Il n'est donc pas étonnant que λ soit proche de $\frac{1}{6}$.

Temps caractéristique

- Il faut un peu moins de 4 secondes pour passer de 1 000 000 à 500 000 noyaux ;
- il faut un peu moins de 4 secondes pour passer de 400 000 à 200 000 noyaux ;
- il faut un peu plus de 4 secondes pour passer de 100 000 à 50 000 noyaux.

Au bout de quatre secondes, on divise le nombre de noyaux par deux, quel que soit le moment considéré.

On peut retenir « 4 secondes », ici, comme « temps caractéristique » de l'évolution de l'échantillon "radioactif". Cette durée, nous l'appellerons le **temps de demi-vie** des noyaux considérés.

III. Résolution analytique de l'équation différentielle régissant l'évolution de N

Mise en place de l'équation différentielle

Rappel des notations :

- À l'instant t, le nombre de noyaux est N(t).
- À l'instant $t + \Delta t$, le nombre de noyaux est $N(t + \Delta t)$.
- La variation du nombre de noyaux pendant cette durée est notée ΔN et vaut $\Delta N = N(t + \Delta t) - N(t)$.

a) N diminue au cours du temps. $\Delta N = N(t + \Delta t) - N(t)$ est donc négatif.

b) Pendant Δt, le nombre de désintégrations est égal à $\lambda \times N(t) \times \Delta t$, où λ est la constante radioactive.

c) Le nombre de désintégrations pendant une durée Δt :

- est proportionnel au nombre de noyaux à l'instant t, $N(t)$;
- est proportionnel à la durée Δt considérée, à condition que cette dernière soit petite.

d) Nous avons donc $N(t + \Delta t) - N(t) \simeq -\lambda \times N(t) \times \Delta t$, c'est-à-dire $\frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} \simeq -\lambda \times N(t)$.

La relation étant d'autant plus exacte que Δt est petit, nous avons :

$\lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} \right) = -\lambda \times N(t)$, c'est-à-dire $N'(t) = -\lambda \times N(t)$. C'est l'équation différentielle qui régit l'évolution du nombre de noyaux au cours du temps.

Résolution analytique

a) La fonction $t \to a \times e^{b\times t}$ est solution de l'équation différentielle si et seulement si :

$$\forall\ t, \left(a \times e^{b\times t}\right)' = -\lambda \times \left(a \times e^{b\times t}\right)$$
$$\Leftrightarrow\ \forall\ t, a \times b \times e^{b\times t} = -\lambda \times a \times e^{b\times t}$$
$$\Leftrightarrow\ a \times b = -\lambda \times a$$

Nous considérerons que a est non nul (sinon la fonction obtenue est la fonction $t \to 0$). Ainsi la fonction $t \to a \times e^{b\times t}$ est solution de l'équation différentielle si et seulement si $b = -\lambda$.

b) La constante *a* est égale à N(0).

c) La constante *b* est l'opposée de λ.

d) En II, nous avons bien obtenu une fonction du type $t \to a \times e^{b\times t}$, avec a = $9{,}85.10^5$ et b = -0,178.