TP - Mesure du rayon de la terre par la méthode d'Eratosthène

L'objectif de cette séance de travaux pratiques est de déterminer la longueur du rayon de la Terre, en suivant la méthode imaginée par Eratosthène (284 à 193 avant J.C).

Au V^{ème} siècle avant J.C., Anaxagore de Clazomènes avait remarqué la forme circulaire de l'ombre portée de la Terre sur la lune lors des éclipses de lune. Il en avait déduit que la terre avait la forme d'un disque.

Plus tard, d'autres observations, comme la disparition des navires à l'horizon, firent évoluer les idées : Aristote (384 ; 322 av. J.C.) déduisit de ces observations que la Terre était sphérique.

Au III^{ème} siècle avant J.C, Eratosthène de Cyrène (284 ; 193 av. JC), géomètre de l'école d'Alexandrie, effectua la première mesure du rayon terrestre. Nous allons découvrir comment.

Syène (actuellement Assouan) était une ville située sur le tropique du Cancer. Les Anciens avaient remarqué qu'à Syène, le Soleil passait au zénith le 21 juin. Ce jour là, à Syène, on pouvait voir (et on le peut toujours) la lumière du soleil au fond d'un puits creusé verticalement.

Mais à la même date et à la même heure, dans la ville d'Alexandrie située plus au nord, les rayons du Soleil n'atteignaient pas le fond des puits.

En mesurant la longueur de l'ombre d'un bâton vertical à Alexandrie le 21 juin, Eratosthène put déterminer le rayon de la terre ! Comment ? Nous allons le découvrir.

Deux informations importantes :

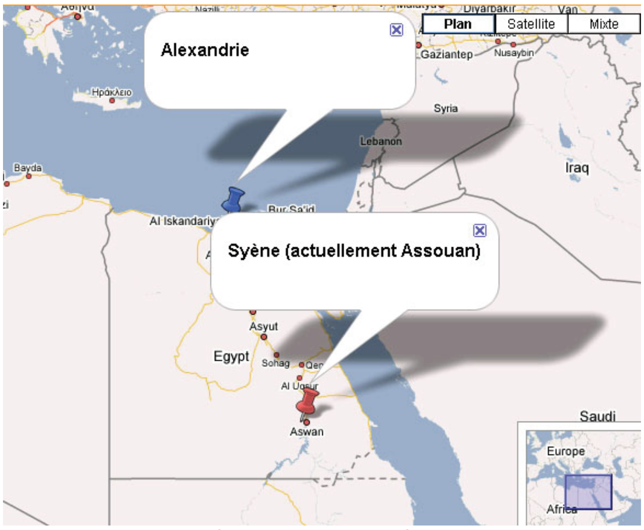
- Quelle que soit la taille du bâton, son ombre avait une longueur 8 fois plus petite que le bâton.
- Eratosthène savait par ailleurs que les caravanes de chameaux mettent cinquante jours pour venir de Syène à Alexandrie. En estimant que ces chameaux parcourent 100 stades environ par jour, il estime la distance entre les deux villes à environ 5 000 *stades*. Un *stade* représentait une longueur de 160 mètres environ.

Répondre aux questions suivantes au brouillon, puis rédiger un compte-rendu, qui comprendra :

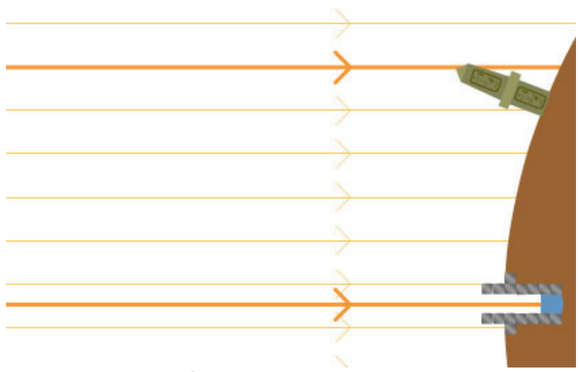
- une introduction, dans laquelle les objectifs de cette séance seront rappelés, et dans laquelle les grandes lignes du raisonnement à venir seront introduites ;
- le raisonnement complet qui a été mené lorsque l'on a répondu aux questions ci-dessous (on n'oubliera pas les schémas) ;
- une conclusion qui reprendra les résultats importants sous la forme d'une courte synthèse (quelques lignes).

QUESTIONS

1) Pourquoi, à Alexandrie, le Soleil n'atteint-il pas le fond des puits ?
2) On appelle α l'angle entre les rayons du Soleil et le bâton à Alexandrie, et β l'angle entre la verticale d'Alexandrie et la verticale de Syène. Effectuer un schéma ou apparaissent les deux angles. Puis calculer la valeur de α et en déduire la valeur de β.
3) Sachant que dans un cercle, les longueurs des arcs sont proportionnelles aux angles au centre, calculer la circonférence de la Terre.
4) En déduire le rayon de la Terre et comparer avec la valeur actuellement reconnue, 6378 km.



Alexandrie et Syène sur le site *Google Maps*



Les rayons du Soleil atteignant un objet vertical à Alexandrie (en haut), et un puits situé à Syène (en bas).

Mesure du rayon de la terre par la méthode d'Eratosthène
- Correction -

INTRODUCTION

Dès l'Antiquité, les anciens ont compris que la Terre était sphérique, par l'observation des éclipses lunaires par exemple. Ensuite, des curieux ont cherché à mesurer le rayon de notre planète ou, ce qui revient quasiment au même, la circonférence de celle-ci.

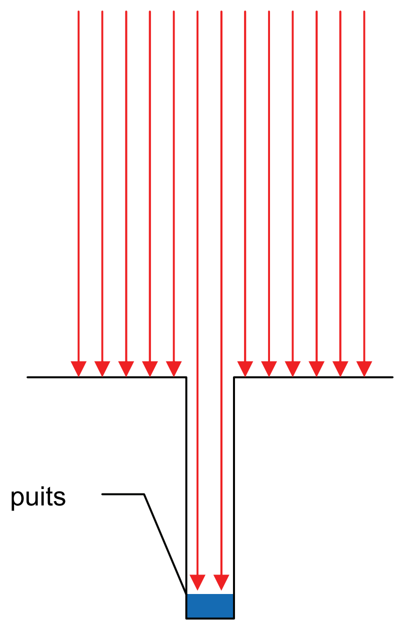
Eratosthène était un géomètre de l'école d'Alexandrie, au III^{ème} siècle avant J.C. Il fut celui qui effectua la première mesure du rayon terrestre.

Nous allons, lors de cette séance de travaux pratiques, découvrir quelle fut la méthode employée par Eratosthène.

Nous commencerons par nous intéresser à la situation particulière de la ville de Syène, en Egypte. Ensuite, nous analyserons les mesures d'Eratosthène et en déduirons, par le calcul, une estimation du rayon terrestre.

LA VILLE DE SYENE, LE 21 JUIN

Eratosthène, comme ses contemporains, savait qu'à Syène (actuellement Assouan), le 21 juin de chaque année, à midi, les rayons du soleil atteignaient le sol *verticalement*. Ainsi, la lumière pouvait éclairer le fond d'un puits profond. Ce qui n'était pas le cas le reste de l'année.



À Assouan, le 21 juin à midi, le Soleil est au zénith : ses rayons atteignent le sol verticalement ; ils éclairent le fonds d'un puits profond.

ALEXANDRIE, AU MEME MOMENT

Le même jour à Alexandrie cependant, les rayons lumineux n'atteignaient pas le sol terrestre de la même manière. Parce que cette ville se situait à une distance non négligeable au nord de Syène, les rayons n'étaient pas alignés avec la verticale.

Sur la figure 1 (page suivante), on note α l'angle entre les rayons lumineux et la verticale à Alexandrie. Par ailleurs, si l'on appelle β l'angle entre la verticale de Syène et la verticale d'Alexandrie, on s'aperçoit que les angles α et β sont des angles correspondants. Ils sont donc égaux.

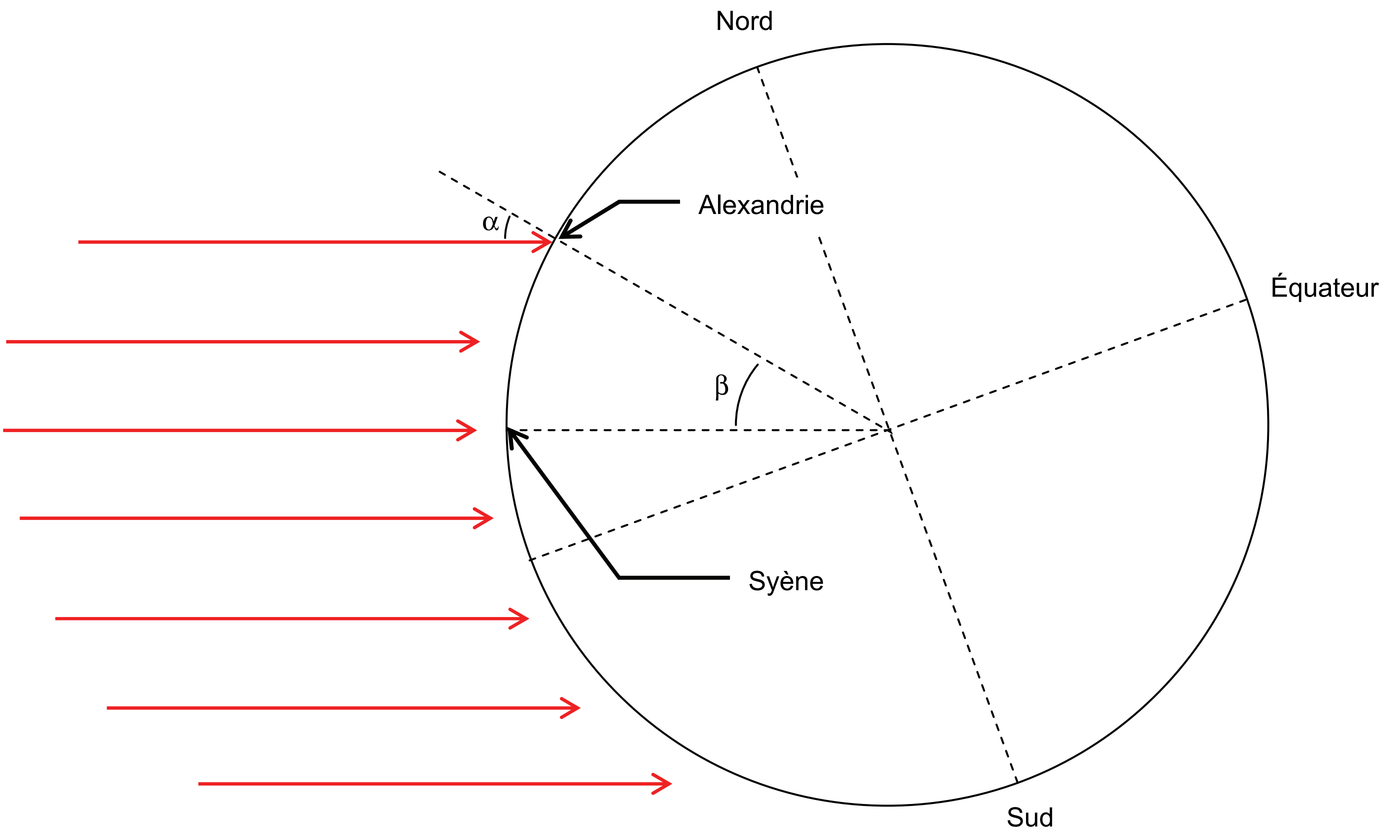


Figure 1

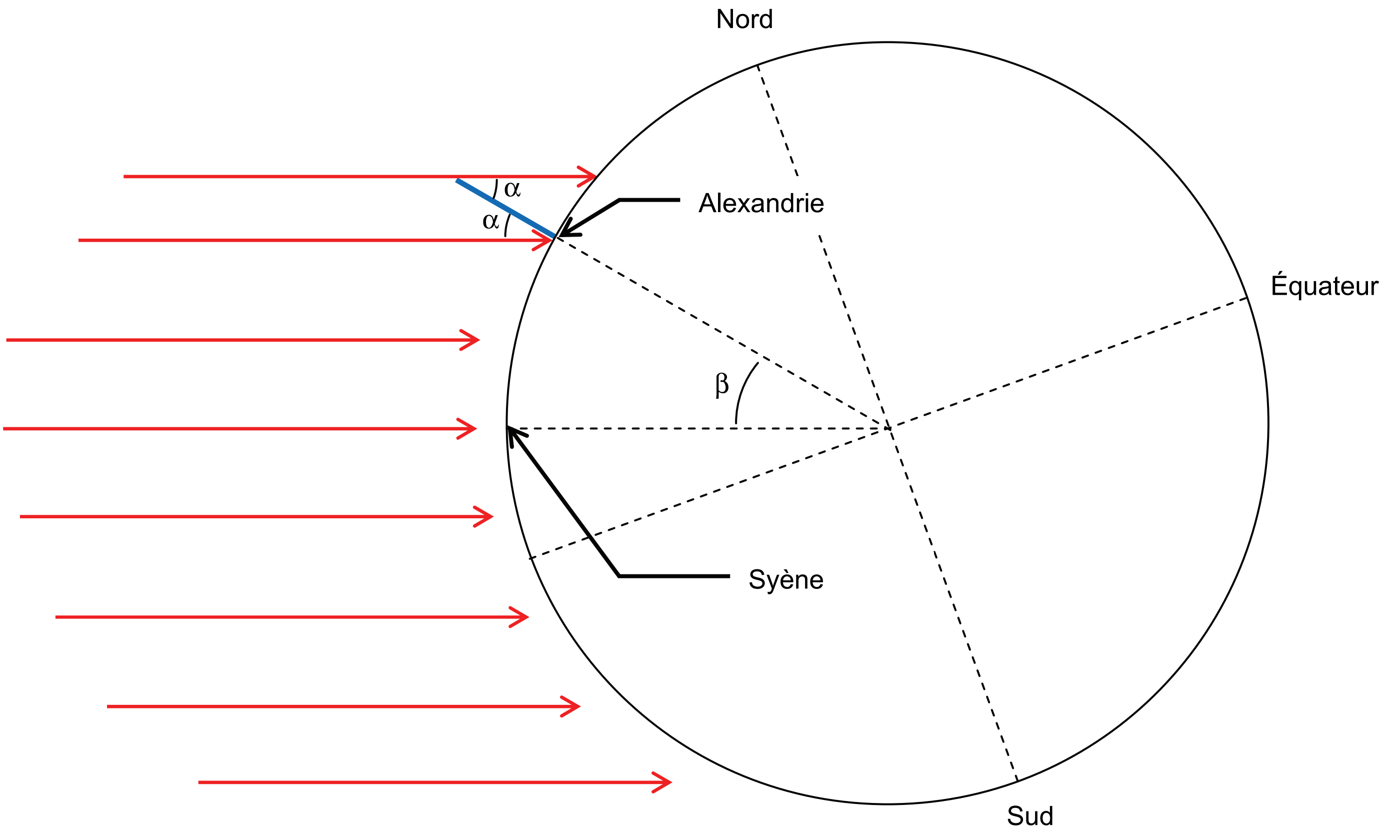
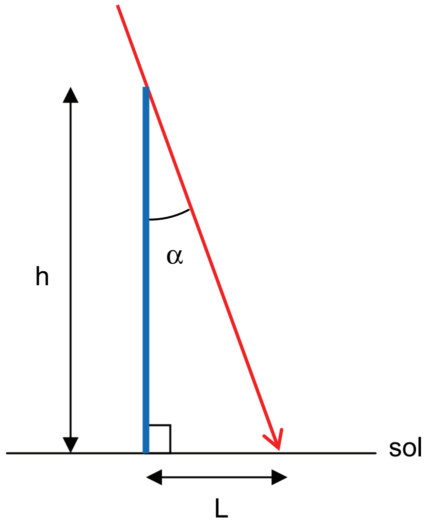


Figure 2

UN BATON PLANTE DANS LE SOL

Eratosthène plante un bâton dans le sol, à Alexandrie le 21 juin à midi. Ce bâton est représenté par un segment bleu sur la figure 2, page précédente. Comment mesurer la valeur de l'angle α ?

On apprend qu'Eratosthène a observé le phénomène suivant : Le 21 juin à Alexandrie à midi, la taille de l'ombre du bâton est huit fois plus petite le bâton lui-même. Un schéma nous permettra d'y voir plus clair :



Sur le schéma, on a fait figurer h, la hauteur du bâton, et L, la longueur de l'ombre.

CALCUL DE L'ANGLE α

D'après les mesures d'Eratosthène, nous savons que *la longueur L est huit fois plus petite que la hauteur h*.

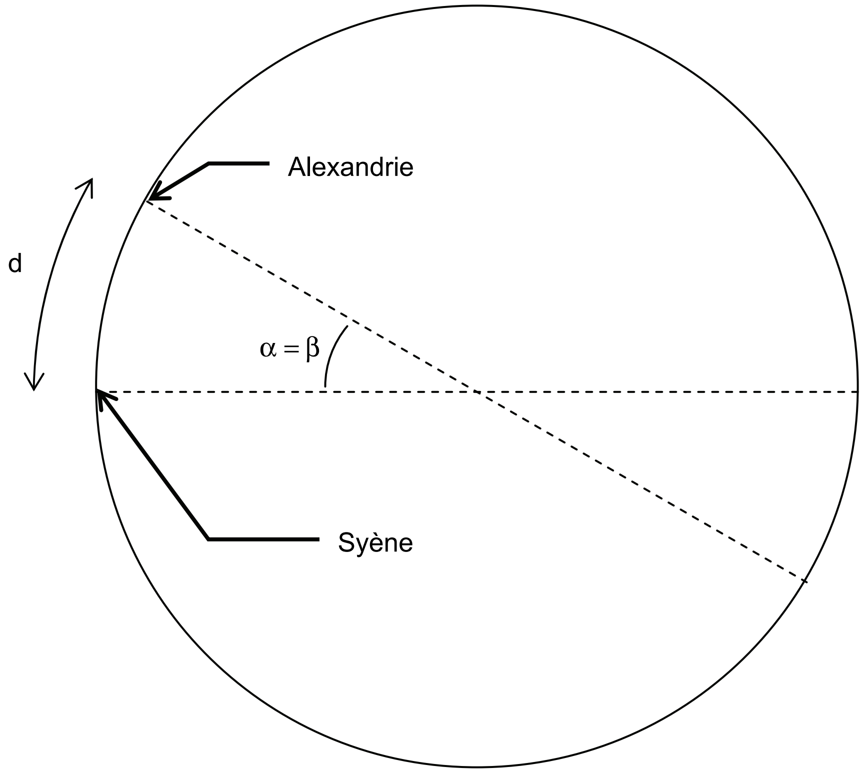
Autrement dit, nous avons : $L = \frac{h}{8}$, c'est-à-dire $\frac{L}{h} = \frac{1}{8}$.

Mais nous connaissons aussi, par la figure, la valeur de la tangente de l'angle α : $\tan \alpha = \frac{L}{h}$. Il vient :

$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{L}{h}\right)$, c'est-à-dire $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{1}{8}\right)$ (1).

ET LA CIRCONFERENCE DE LA TERRE ?

Soit d la longueur de l'arc de cercle entre Alexandrie et Syène, c'est-à-dire la distance entre les deux villes, mesurée à la surface de la Terre.



Soit D le périmètre du cercle, ou, autrement dit, la circonférence de notre planète.

Le rapport de d sur D est égal au rapport de l'angle α sur l'angle correspondant à un tour complet, c'est-à-dire : $\frac{d}{D} = \frac{\alpha}{360}$ (2).

Remarque : Il est également possible d'établir cette relation en remarquant les correspondances suivantes :

$$\alpha \leftrightarrow d$$
$$360° \leftrightarrow D$$

et en effectuant ce que l'on appelle communément un *produit en croix* : $\alpha \times D = d \times 360$, qui mène à la relation $\frac{d}{D} = \frac{\alpha}{360}$.

En utilisant les relations (1) et (2), nous obtenons :

$$\frac{d}{D} = \frac{\tan^{-1}\left(\frac{1}{8}\right)}{360}$$

$$\Leftrightarrow D = \frac{360 \times d}{\tan^{-1}\left(\frac{1}{8}\right)}$$

Reste à déterminer la valeur de d.

À l'époque d'Eratosthène, *les caravanes de chameaux mettaient cinquante jours pour venir de Syène à Alexandrie*. En estimant que ces chameaux parcouraient 100 stades environ par jour, on estimait la distance entre les deux villes à environ 5 000 stades. Un stade représentant une longueur de 160 mètres environ, la distance d était proche de $5\,000 \times 160$ m.

Ainsi, nous pouvons calculer la circonférence de la Terre :

$$D = \frac{360 \times 5\,000 \times 160}{\tan^{-1}\left(\frac{1}{8}\right)}$$

$$= 4{,}0.10^{7}\,\text{m}$$

$$= 4{,}0.10^{4}\,\text{km}$$

Les mesures d'Eratosthène ainsi que la méthode qu'il a utilisée, nous permettent d'évaluer à environ 40 000 km la circonférence de la Terre.

Si l'on appelle R le rayon de la Terre, nous avons $D = 2\pi R$, c'est-à-dire $R = \frac{D}{2\pi}$.

Nous avons donc

$$R = \frac{\dfrac{360 \times 5\,000 \times 160}{\tan^{-1}\left(\frac{1}{8}\right)}}{2\pi}$$

$$= 6{,}4.10^{6}\,\text{m}$$

$$= 6400\ \text{km}$$

Le rayon de la Terre est évalué à environ 6400 km par la méthode d'Eratosthène.

CONCLUSION

En conclusion, nous avons obtenu une mesure intéressante de la valeur du rayon terrestre par une méthode qui date de l'Antiquité. Et qui, surtout, utilise un simple bâton planté dans le sol !

Cette valeur, voisine de 6 400 km, est très proche de la valeur actuellement admise pour le rayon terrestre moyen : 6380 km.

L'écart entre la valeur que nous avons obtenue et la valeur mesurée actuellement par les satellites est de $\frac{6400 - 6380}{6400} \times 100 = 0{,}3\,\%$, ce qui, pour l'époque, paraît presque incroyable. Cependant, notons que la précision de la mesure de la distance entre Syène et Alexandrie était approximative. Ainsi, si l'on parvient à une telle précision à la fin de nos calculs, c'est peut-être aussi un peu par hasard, ou plutôt, par chance. Cette remarque ne doit cependant pas réduire la qualité du raisonnement d'Eratosthène et le tour de force qu'il a effectué.